Lieselotte Heller

DIE VERMESSENDE GEOMETRIE ALS EINE MATHEMATISCHE PRAXIS

Die Lehre von den Kristallformen, die Kristallmorphologie, ordnet die Kristalle nach Systemen. Die Kristallsysteme umfassen Gruppen von Kristallklassen, die sich auf Koordinatensysteme gleicher Symmetrie beziehen lassen. Danach werden sechs Systeme unterschieden: das trikline, monokline, rhombische, tetragonale, hexagonale und kubische. Vom hexagonalen System, das zwölf Klassen umfaßt, wird gewöhnlich entweder eine rhomboedrische oder eine trigonale Abteilung getrennt. Mit unserer Kuboeder-Reihe sind vier (fünf) dieser Kristallsysteme mit 18 allgemeinen Kristallformen der möglichen 32 Klassen erfaßt. So gelten die Kerne der Kuboeder mit den Nummern 5 bis 10, 15, 16 und 20 als Vertreter des kubischen, der Kern des Kuboeder Nr. 11 als Vertreter des tetragonalen und der Kern der Nummer 12 als ein solcher des rhombischen, die Kerne der Nummern 17A und 17B als Vertreter des trigonalen (rhomboedrischen) und die der Nummern 13, 14, 18 und 19 schließlich als Vertreter des hexagonalen Systems. Die Achsenkreuze unterscheiden sich wie folgt: das kubische Achsenkreuz verfügt über drei gleich lange (a-a-a), das tetragonale über zwei gleich lange und eine kürzere oder längere (a-a-b), das rhombische über drei verschieden lange (a-b-c) Achsen. Diesen drei Systemen gemeinsam ist, daß ihre Achsen alle im rechten Winkel in einem Punkt aufeinandertreffen. Dagegen weist das trigonale (rhomboedrische) System in einer Ebene Winkel von 120 Grad, das hexagonale solche von 60 Grad auf. [1] Da die verschiedenen Polyeder jeweils aus dem Würfel (Kubus) geschnitten sind und die dadurch entstandenen Teilkörper (Schale) nur mit ihrem Polyeder-Kern eine anders nicht gegebene Einheit bilden, liegt hier eine Vielfalt an figurierten Flächen und Körperformen vor,

---

[1] Eine Übersicht über die natürlichen Vorkommen der Kristallformen, wie sie durch die Kerne unserer KUBOEDER vertreten werden, ist im Anhang zu finden, ebenso eine Legende zu der jeweils chemischen Zuordnung der einzelnen Kristalle.

die aus einem, allen Körpern gemeinsamen Ganzen hervorgegangen sind.

Es wird deutlich, daß die Geometrie in den Grundformen der Flächen (alle Dreiecksformen, Quadrat, Rechteck, Fünf-, Sechs- und Achteck, Trapez, Parallelogramm und Rhombus) und der Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Rhomben- und Pentagondodekaeder mit den jeweiligen Kombinationsformen wie Kubotetraeder, Kubooktaeder und Kubododekaeder, ferner Drei-, Vier-, Sechs- und Achtkantprismen, Quader, trigonale und hexagonale Dipyramiden, trigonales Rhomboeder, hexagonales Trapezoeder und Skalenoeder) erfaßt ist und diese Formenvielfalt nur durch die Schnitte entstehen konnte, die einer einfachen, mit dem Würfel gegebenen geometrischen Ordnung gefolgt sind.

So wird mit den KUBOEDERn Geometrie nicht nur **körperlich**, sondern sie gerät für den Schüler durch den direkten Zugang zu der im Schnitt artikulierten geometrischen Ordnung auch zu einer echten Vermessungskunst. Geometrie wird hier im alten Sinn des Worts **praktisch**, sie wird zu einer Kunst, wenn wir so wollen, die die Erde in der Klarheit ihrer Kristallformen vermißt.

Im Alltag gehen wir recht pragmatisch mit den Dingen um. Die Vermessungskunst aber interessiert nicht, wie sie immer schon gebraucht werden und wie sie uns immer schon nützlich sind, vielmehr wie und was die Dinge für sich darstellen jenseits jener pragmatischen Aspekte. Pädagogisch stellt sich die Frage so: Was kommt den Dingen und was kommt uns zu, wenn wir von den gewohnten Umgangsformen absehen, durch welche unsere Beziehungen zu den Dingen im Alltag geprägt sind und wir uns auf eine Beziehungsebene besinnen, in welcher es nicht um Beherrschung (Macht) oder Verwendbarkeit (Gebrauch oder Herstellung) geht, sondern um eine Praxis, in der die Dinge in unverletzter Würde in Erscheinung treten. Welche Art also von 'Umgang' ist gefragt, wenn der alltägliche Gebrauch, die Nützlichkeit, Zweckhaftigkeit oder Beherrschbarkeit außer Acht bleiben und auch nicht die Beschaffenheit (Materialität), sondern die bloße Körperlichkeit der Dinge zur Debatte steht?

Wenn die Kunst die Dinge aus ihrer Alltäglichkeit befreit, kommt dies einer Befreiung zu Dimensionen gleich, in denen sich Körperlichkeit allererst konstituieren kann, denn eine die Wirklichkeit **vermessende** Praxis begreift die Welt von den Ordnungen her, wie sie sich in natürlicher Weise und Schönheit am Körperlichen offenbaren. Mit anderen Worten: Wenn wir uns in der Kunst des Vermessens üben, wird die Geometrie in den Anfang gerückt und so die Natur des Körperlichen, die Physis, von Grund auf erfahrbar. Die KUBOEDER eignen sich für solche Übungen in besonderer Weise, denn sie sind pragmatisch nicht belastet. Es 'gibt' die KUBOEDER nicht in unserer Alltagswirklichkeit. Das heißt, die hier zur Darstellung kommende Körperlichkeit erscheint uns in dieser geschlossenen (KUBOEDER-) Form zunächst fremdartig. Und doch wird in den Verhältnissen dieser Körper eine Schönheit offenbar, die uns von Natur aus nicht ganz unbekannt sein kann. Mit ihrer Fremdheit klingt nämlich gleichzeitig etwas an, das auf einer geistigen Ebene eine starke Resonanz in uns auslöst, sobald wir uns in ihren Bannkreis begeben.

Didaktisch gewendet geht es uns hier um die Frage der geistigen Bildung des Kindes durch die 'Sprache' der Körperlichkeit als (nonverbale) Voraussetzung des praktischen Lernens.

Die Beziehung zu den Körperdingen unterscheidet sich unseres Erachtens von der allgemeinen zwischenmenschlichen Beziehung in erster Linie darin, daß sie die Fähigkeit voraussetzt, in Dimensionen der Körperlichkeit Beziehungen aufbauen und Vorstellungen entwickeln zu können, um über die sinnliche Erfahrung dessen, wodurch Dinge zu Körpern werden, der eigenen geistigen Bezogenheit auf natürliche und künstlerisch-ästhetische Erscheinungen gewahr zu werden. Praktisches Lernen, das heißt darstellendes Lernen, das es ja immer mit dem Körperlichen zu tun und nach dem hier formulierten Verständnis im Namen der Dinge (Francis Ponge, Einführung in den Kieselstein) sich zu vollziehen hat, heißt deshalb: von den Gesetzmäßigkeiten der Ordnungen, der Kristallnatur der Dinge, die wie Texte das Lesen der Zeichen erforderlich machen, lernen, die Gedanken zu vorgestellten Sinneinheiten zu ordnen und das so Geformte zur Sprache zu bringen und sich dabei auch in Begriffsbildung zu üben.

"Die einzige Möglichkeit für die ersten Begriffsbildungen, die allen Einzelwissenschaften vorausgehen, ist, sich wie Aristoteles an einfachen Beispielen zu orientieren" rät Paul Lorenzen als Grundprinzip des methodischen Denkens (MD 142). Einfache Beispiele für erste irdische Gestaltungen - so Fröbel - sind die Kristalle, die dem Reich der Steine, der unbelebten Natur angehören. Den Steinen, die im Verbund mit den Pflanzen, Tieren und Menschen als Repräsentanten alles Seienden gelten, bleibt nur das, was auch für alle anderen gilt: "nämlich daß sie Körper sind". (MD 143) Physik ist nach Lorenzen - und nach Fröbel - die Lehre von den Körpern im allgemeinen, also "universelle Somatologie". Diese gliedert sich in die Lehre von der Zusammensetzung der Körper und in die von der Bewegung der Körper (ohne Änderung ihrer Zusammensetzung). Beiden liegt jedoch die Lehre von den Körpern, insofern diese nichts sind als Körper, zugrunde. Fragt man nun nach möglichen 'Anfängen' in der Physik, so führt der Weg zu einem Gebiet, das Lorenzen "Protophysik" nennt. Und in dieser stehe die Geometrie "an erster Stelle" (MD 148), weil sie zum einen auf "ersten Sätzen" beruht (als Beispiel nennt Lorenzen den Pyramidensatz V = 1/3 FxH, der schon im alten Ägypten bekannt war). Zum andern kommen wir zu ihr nur, "wenn wir nicht auf die Materie achten, aus der ein Körper besteht, sondern auf die Form, die ein Körper hat" (MD 149).

In seinem Buch "Elementargeometrie. Das Fundament der Analytischen Geometrie" zeigt Paul Lorenzen, wie ein elementarer Teil der euklidischen Geometrie, "der gebraucht wird, um wenigstens Würfelgitter zu konstruieren ... und um wenigstens die pythagoräische Abstandsformel zu beweisen, aus dem alltäglichen Umgang mit Flächen, Linien und Punkten begründet werden kann". (Vorw.) Seine These, die "Elementargeometrie" sei im Gegensatz zu Axiomssystemen als Fundament der Analytischen Geometrie unentbehrlich, und der ausdrückliche Bezug auf die elementare Praxis des Teils der Geometrie, bei der es um Fragen der "Ausdehnung beliebiger

Dinge" oder fester Körper geht, erlauben es ihm, nicht von der Wissenschaft auszugehen, sondern von der Sprache, die in einer nicht-wissenschaftlichen Praxis gang und gäbe ist, also von dem Gebrauch der Wörter, wie sie im alltäglichen Leben vorkommen, wenn man es mit Körpern zu tun hat. Mit Körpern sind hier "Dinge ohne Berücksichtigung ihrer Seele" (19) gemeint. Grundwörter einer solchen Praxis sind z.B. Körper, Fläche, Kante, Ecke. Wörter, die dem Kind in der Regel schon recht früh vertraut sind, ohne daß sie für es den Charakter von Begriffen hätten. Das Kind lernt danach die Wörter kennen nicht über Definitionen, sondern exemplarisch über Sprachbeispiele und Gegenbeispiele. Lorenzen spricht deshalb auch von "exemplarischen" oder "vagen" Definitionen im Gegensatz zur "exakten" Definition.

Der *Gebrauch* von vage definierten Wörtern kann - so sagt Lorenzen - "nur in der Praxis gelernt werden". Das heißt dann aber auch, daß der Gebrauch nicht unabhängig von den Körperdingen, sondern nur über die Vorstellung gelernt werden kann, die das Kind von den Dingen gewinnt, deren Namen ihm umgangssprachlich begegnen. Gelernt wird an den Körpern zunächst nicht, woraus sie bestehen, sondern *wie* sie bestehen. Warum der Würfel nicht wie die Kugel rollt, lernt das Kind aus einem körperlichen Verhalten, ohne daß es dabei einer exakten Definition der in solch spezifischen Kontexten eventuell zur Sprache kommenden Begriffe, wie z.B. Fläche oder Kante, bedürfte. Die Begriffsbildung ist eine Funktion des tätigen Involviertseins in eine, die Theorie evozierende Praxis. An der Bewegungsform des Körpers oder an den Spuren, die er hinterlassen kann und die auf Bewegung und Ereignis hin angelegt sind, lernt das Kind, die Differenziertheit des Körperlichen durch die Abgemessenheit der Bewegungen aufzufassen und so auch zum Beispiel die Ebenheit der Fläche von der Winkeligkeit der Kante und diese von der Spitzigkeit der Ecke zu unterscheiden, ohne schon einen exakten mathematischen Begriff von diesen Dingen zu haben.

Protophysik geht nach Lorenzen also einher mit Begriffsbildung. Die Unterscheidung einer Kugel von einem Würfel z.B. lernt das

Kind demnach dadurch, daß es mit den Dingen und den ihnen zugesprochenen Worten in Berührung kommt, daß es die Dinge in die Hände und die Worte in den Mund nehmen und so für sich begreifen kann. Es lernt die Verwendbarkeit von Wörtern in Situationen des Sich-Einverleibens und in einer Welt, in der immer schon gesprochen wird und wo es ab dem ersten Wort auch selbst immer wieder sprechen wird. Die Wörter, die es 'aufschnappt', wird es immer wieder verwenden, wie es sich dem Ding, von dem es einmal einen Eindruck gewonnen hat, immer wieder zuwenden wird, um immer mehr und neue Entdeckungen mit dem Ding und mit dem Wort zu machen.

"Ein Kind lernt die Welt mittels Prädikatoren kennen, indem es sogleich lernt, was es von wiederkehrenden Dingen zu erwarten hat und welche Wirkungen insbesondere seine Handlungen haben werden. (Z.B. was ist ein 'Ball', wie verhält er sich, wie muß ich mich beim Ballspiel verhalten.)" (Kamlah/Lorenzen 169). Die enge Knüpfung des Sprechens an das Ding, das zuhanden ist, ist noch kein Sprechen über, sondern eher ein Sprechen mit dem Ding. 'Ball' als Prädikator ist noch nicht gegenständlich, ist noch nicht objektiviert, hat noch keinen eigenen Namen, ist deshalb auch "ohne Begrenzung immer wieder verwendbar". Mit dem Prädikat 'Ball' ist noch nichts über den Gegenstand 'Ball' ausgesagt. Das Kind lernt in der Situation des Zeigens: "dies ist ein Ball" weder, wie dieser beschaffen ist, noch was er kann, sondern (und hiermit trennen wir uns von Kamlah/Lorenzens Ansatz) in welchem Kontext und mit welcher Intention ihm der Ball gezeigt wird und wie dieses Zeigen der Erwachsenen sprachlich 'klingt'. Das Kind lernt die soziale Wirklichkeit über kulturell vermittelte Verhaltensformen kennen, durch die die körperliche Welt in spezifischen Formen der Darstellung zur Erscheinung kommt. 'Exaktheit' - und das heißt auch eine angemessene Begrifflichkeit - erwächst ihm aus der Komplexität von "Lebensformen" (Formen, in denen Dinge zum Leben kommen) in dem Maß, in dem es die Gesetzmäßigkeiten der Dimensionen zu differenzieren vermag, in denen Körperliches erscheint. Aus diesem Grund bedarf das Lernen einer gerade der Routine des Alltags enthobenen Praxis, in der das bereits vorhandene Wissen zwar umgangssprachlich transportiert wird, die Dinge aber im

Licht ihrer geistigen Natur zur Erscheinung kommen können. Exaktheit ist dann eine Frage nicht der genauen Wiedergabe einer Erscheinung (was gar nicht möglich wäre), sondern des Präsentierens einer Artikulation, insofern nämlich, daß durch die Artikulation die Stimmigkeit der im Körperlichen offenbar gewordenen Ordnung unter Beweis gestellt und dadurch auch gleichzeitig konstitutiv wird für die Angemessenheit der jeweiligen Handlungen in einer die Körperlichkeit darstellenden Praxis.

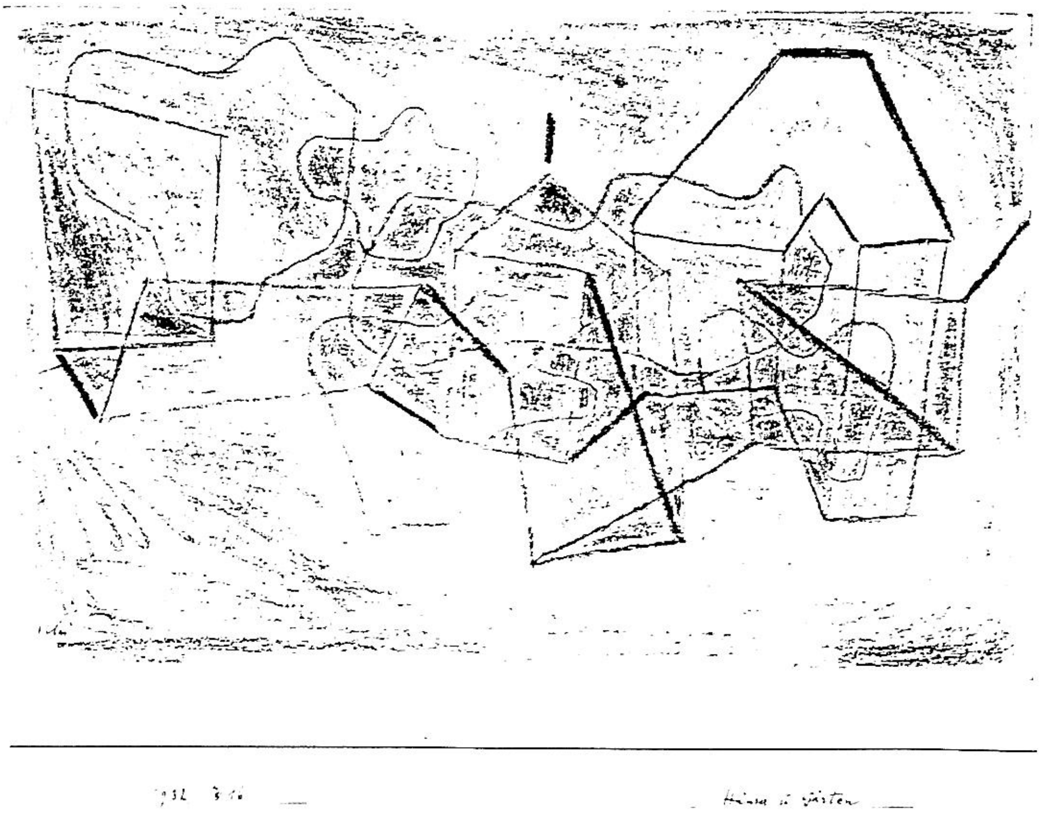
Möchte der Lehrer also über den bloß einsinnigen Gebrauch der Prädikatoren hinausgehen und die Dinge nicht nur in vereinzelnden Wort-Ding-Relationen seinen Schülern vorstellen, weil er will, daß die Körperlichkeit der Dinge zur Sprache kommen soll, so sollte er mit seinen Schülern Fälle inszenieren, in denen das Verhältnis von Gesetz und Ordnung seinem inneren Sinn nach, mit anderen Worten: die geistige Natur des Körperlichen, zur Sprache kommt. Die Auslegung von Gesetzen und die Artikulation von Ordnungen ist eine Aufgabe der darstellenden Praxis. Nur in ihr kann die oben offenkundig gewordene Eindimensionalität einer direkten begrifflichen Zuordnung durchbrochen werden, in der die Dinge nicht eigentlich zur Sprache kommen. Es könnte der Gang sein vom sprachlich festgeschriebenen *Das-ist* über ein zu ganzheitlichen Bezügen sich öffnendes, aus der Vorstellung heraus geborenes *Das-sei* zu einem, an der äußeren körperlichen Ordnung reflektierten, rhetorisch schließenden *Wenn..,dann*.

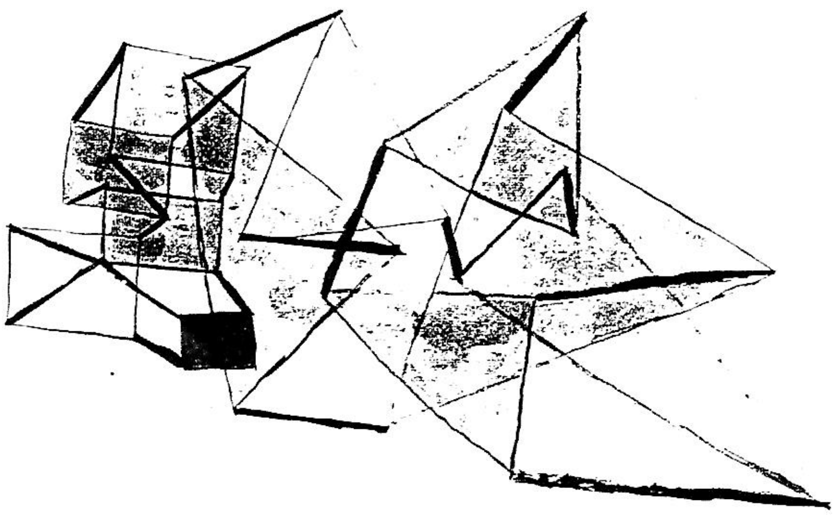
Wir wollen uns dem Problem der Prädikation geometrischer Begrifflichkeit noch einmal von einer anderen Seite nähern, um unseren Blick auf die geometrische Beschaffenheit der Naturformen auch für die ästhetische Dimension des Körperlichen zu weiten. Den künstlerisch bildenden Charakter der Natur- und Kulturformen und das dadurch bestimmte Verhältnis des bildenden Künstlers zu ihnen hat der einst am Bauhaus lehrende Paul Klee wie folgt beschrieben:

"Auch der Kunst ist zu exakter Forschung Raum genug gegeben, und die Tore dahin stehen seit einiger Zeit offen. Was für die

Musik schon bis zum Ablauf des achtzehnten Jahrhunderts getan ist, bleibt auf dem Bildnerischen Gebiet wenigstens Beginn. Mathematik und Physik liefern dazu die Handhabung in Form von Regeln für die Innehaltung und für die Abweichung... Algebraische, geometrische Aufgaben, mechanische Aufgaben (das heißt in bezug auf Statik und Dynamik) sind Schulungsmomente in der Richtung zum Wesentlichen...Man lernt hinter die Fassade sehen, ein Ding an der Wurzel fassen. Man lernt erkennen, was darunter strömt, lernt die Vorgeschichte des Sichtbaren. Lernt in die Tiefe graben, lernt bloßlegen. Lernt begründen, lernt analysieren." (Paul Klee 1928/29)

Im Bildnerischen sind, so lehrt Paul Klee, die Linie, der Hell-Dunkel-Ton und die Farbe Grundelemente der Gestaltungslehre, die im Ganzen ineinander wirken. In der Linie kommt das jeweilige Maß einer Bewegung, wie Rhythmus, Dynamik oder Statik zum Ausdruck, die eine aktive, mediale oder passive Funktion übernehmen, das heißt, sich in einer freien Linie, einer geschlossenen Form oder, durch Linienverschiebung, in einer Fläche, durch Linienverspannung in einer räumlichen oder körperlichen Darstellung erfüllen kann. Das Maß fungiert dabei als reine Spannung und ist als solche Ausdruck der geistigen Dimensionen solcher Erfüllungen in der Zeit. (Dazu Klees Bild "Die Zeit" von 1933) Mit der Hell-Dunkel-Tönung treten Maß und Gewicht, Maßgebendes und Abwägendes, in spannungsvolle Beziehungen. Die Farbe schließlich vereinige in sich die Forderung sowohl der Form (Linienhandlung) wie der Hell-Dunkel-Tönung (Schattenhandlung), verwandle aber, gemäß ihrer Lichtnatur, die in diesen Handlungen wirkenden geistigen Kräfte, nämlich Maß und Gewicht, in nicht quantifizierbare mehrdimensionale Beziehungsqualitäten. (Vergl. dazu Klees Aquarell von 1930 mit dem Titel: Gewagt wägend) Wenn Klees "Spielraum" auch die Fläche ist, seine bildnerischen Handlungen also stets auf dieses Medium bezogen bleiben, so ist sein Denken doch ganz und gar vom Körper her bestimmt. Die Mutter der Theorie seiner Praxis ist die Erde in ihrer körperlichen Natur. Die Maximen und Prinzipien seiner Formenkunde hat er in der Anschauung des formalen Reichtums und der schöpferischen Vielfalt gebildet, in welcher natürliche Körper erscheinen.





Häuser in Gärten
1932, W 16 (256)
Farbige Tinte, Wachsfarbenstifte/
Konzeptpapier

Winkelverspannung in zwei Gruppen
1930, N 1 (101)
Aquarell/Kupferdruckpapier

Paul Klee

Form und Maß sowie das Licht- und Schattenhafte sind Grundbegriffe des Körperlichen, die sich bis in die flächige Darstellung hinein behaupten. Die Kantigkeit des Körpers setzt Paul Klee um in linienverspannte Flächen. Das körperlich bedingte Spiel von Licht und Schatten 'vertont' er in melodischen Abstufungen von Hell- und Dunkeltönen. Statik und Dynamik der geistigen Natur des Körpers fängt er ein im spannungsvollen Wechselspiel von strenger Maßgabe und balancierender Abwägung. Wir müssen also von Klee aus rückwärts denken, um seine Sicht der Körperlichkeit zu begreifen, die ihm Ausgangspunkt war, bevor er ihre Eigentümlichkeiten in flächige Darstellungen umsetzen konnte.

Punkt, Linie und Fläche sind für die Geometrie Grundelemente einer Axiomatik. Für Paul Klee dagegen stellen sie elementare Handlungen, will sagen 'ursprüngliche' Bewegungen, nach Maßgabe des Körperlichen dar. Das heißt es geht ihm in seiner Formenlehre, die er am Bauhaus vertrat, um einen verstehenden Aufbau der flächigen Formen in Dimensionen der körperlichen Erscheinungen. Deshalb spielt bei ihm die Dynamik im Bildnerischen eine so große Rolle, mittels derer er ganz unterschiedliche Dimensionen des Körperlichen ins Bild bringt, wie Gewicht, Gegengewicht, Ballance, Steigerung, Rhythmus, Metrik, Bewegungsform und Bewegungsrichtung. Das Wissen um die energetische Dimension des Körperlichen gehört sozusagen zur Grundausstattung seiner Gestaltungslehre und alle Übungen dienen im Grunde der Entwicklung, Förderung und vor allem Vertiefung der Verfügungsgewalt nicht über die Dinge, sondern über das Wissen um ihre Körperlichkeit.

Steigerung der Disponibilität - das muß auch das pädagogische Grundprinzip sein der mathematischen Praxis einer vermessenden Geometrie.

In diesen Zusammenhang sei ein (gekürztes) Protokoll eingefügt von einer Unterrichtseinheit im Mathematikunterricht der 9. Hauptschulklasse der Albert-Schweitzer-Schule in Albershausen.

Thema: Einführen in das Arbeiten mit 'Würfelschnitten'

Die Arbeit mit geschnittenen Würfeln soll in den 'normalen' Mathematikunterricht integriert werden; die Schüler haben sich in der Geometrie schon mit Körpern befaßt und der Satz des Pythagoras ist eingeübt.

1. Aufgabenstellung: "Ihr habt seither mit Würfeln nur in der flächigen Darstellung gearbeitet. Heute sollt Ihr selbst einmal Würfel schneiden aus den Kartoffeln, die Ihr mitgebracht habt."

Durchführung: SS schneiden forsch drauf los. Ist ja auch fast ein Kinderspiel: Würfel schneiden - haha, einfach... Oh, der wird ja immer schief und 'länglich'. Muß hier noch was weg. Schief, ach und zu flach. Also noch ein Schnitt und noch einer. Na ja, so ungefähr.

Schon diese kleine Unterrichtssequenz zeigt, daß selbst diese einfache Aufgabe sich in der Praxis als eine durchaus anspruchsvolle Tätigkeit erweist. Die 'ideale' Forderung, einen möglichst exakten Würfel zu schneiden (gleichgroße Flächen, gleichlange Kanten, rechte Winkel) stellt die Schüler vor manch unvorhergesehenes praktisches Problem. Sie stellen fest: *ein* Schnitt verändert immer zugleich mehrere Flächen oder Seiten des Körpers. Und: ein Fehlschnitt kann meist nicht durch eine einzige Korrektur behoben werden.

Die Schüler machen die Erfahrung der Dreidimensionalität am Körperlichen und die mathematischen Grundbegriffe Fläche, Kante, Ecke, rechter Winkel prädizieren sich ihnen während und infolge ihres konstruktiven Tuns und durch die praktische Erfahrung dessen, was den Würfel zu einem regelmäßigen Körper macht.

2. Aufgabenstellung: Den selbst hergestellten Würfel in einen anderen Körper verwandeln durch 'regelmäßige'

Schnitte. Bedingung: die Schnittflächen dürfen weder parallel zu einer Würfelfläche entstehen, noch durch den Mittelpunkt des Würfels gehen. "Überlegt Euch eine eigene Schnittregel."

Die Aufgabe läßt bewußt offen und den SS zur Wahl, wie sie ihre Schnitte durchführen werden, ob sie also Kanten oder Ecken abschneiden wollen.

Durchführung: Auch diesmal gehen die Schüler sofort mit Eifer ans Werk. Drei verschiedene Verhaltensweisen sind zu beobachten:

1. Ohne große Überlegung wird einfach drauf losgeschnitten.
   Ergebnis: 'Kartoffelsalat'.
2. Bewußte Entscheidung für einen bestimmten Schnitt (es wurde ausschließlich der Ecken-Schnitt gewählt), jedoch ohne Überlegung einer entsprechenden Schnittregel.
   Ergebnis: ungleiche Abschnitte und als Folge ein ungestalter Körper als Kern.
3. Bewußte Entscheidung für den Schnitt mit gleichzeitiger Anwendung einer Schnittregel. Alle Schüler, die die Ausführung des Schnitts durch eine Regel leiteten, haben die acht Ecken des Würfels kantenhalbierend geschnitten.
   Ergebnis: acht gleichseitige Dreiecke als Schnittflächen, entsprechend gleich viele formidentische Teilkörper und als Kern einen kristallin geformten Körper.

Der L-Hinweis, den Würfel doch wieder zusammenzubauen, wenn der nächste Schnitt nicht mehr 'verortet' werden konnte, wurde von den Schülern gerne aufgenommen. Die Kartoffel erwies sich dabei, durch ihre Feuchtigkeit, als ausgezeichnet haftendes Material. Die abgeschnittenen Teile konnten mühelos wieder an ihren 'Platz' geheftet werden. Die zwischenzeitliche Rekonstruktion des Würfels erwies sich als ideale Orientierungshilfe beim Ansatz des nächsten notwendigen Schnitts.

Die Präsentation der gelungenen Würfelschnitte durch die Schüler soll nun verbunden werden mit der Formulierung ihrer eigenen Schnittregel, was den Schülern aber nicht geringe sprachliche Schwierigkeiten bereitet. Sie zeigen zuerst einfach an ihrem Objekt - nachdem sie alle Abschnitte wieder zu einem Würfel gefügt haben - die Schnittfugen mit dem Finger entlangfahrend, wie und wo sie mit ihren Schnitten angesetzt haben und ahmen demonstrativ vor der Klasse ihre zuvor getätigten Schnitte nocheinmal nach.

SS: Ich habe hier angesetzt, so schräg, daß der Schnitt genau an der Kante durchgeht, und dann nach unten geschnitten, daß ich hier wieder rauskomme.

L: Versuche, nicht zu erzählen, was Du gemacht hast, sondern zu beschreiben, wie der Würfel sich verändert hat durch deinen Schnitt.

SS: Der Schnitt geht durch drei Kanten des Würfels, diese bilden zusammen eine Würfelecke. Durch den Schnitt wird jede der drei Kanten halbiert. Es entstehen auf drei Würfelflächen diagonale Schnittlinien. Die Schnittfläche ist ein gleichseitiges Dreieck. (Zusammenfassung aus mehreren Schüler-Äußerungen)

L: Die Schnittregel?

SS: Gerader Schnitt durch drei Würfelkanten, die halbiert werden. Entsprechend der Anzahl Würfelecken sind acht Schnitte durchzuführen.

3. Aufgabenstellung: Nach einem (körperlichen) Vorbild die Schnittregel finden und den Körper nachschneiden. Die Schüler arbeiten mit Kuboeder Nr. 11 (achtkantige Säule als Kern mit einer Schale bestehend aus vier Prismen).

Durchführung: Die Schüler entdecken an dem geschnittenen Würfel sehr schnell die Dreiteilung von Flächen und Kanten. Die Schnittregel ist bald formuliert: Schnitt parallel zu einer senkrechten Kante, der die von dieser Senkrechten ausgehenden waagrechten Würfelkanten im Verhältnis 1:2 teilt. Entsprechend der vier Senkrechten des Würfels sind vier Schnitte notwendig.

4. Aufgabenstellung: Berechnung des Volumens der Schale und des Kerns.

Durchführung:
Schale: Welche Kantenlängen der Prismen sind bekannt? Weshalb können wir sie ohne zu messen bestimmen?

Beachte: *Das Verhältnis der Teile zum Ganzen!*

Es gibt *eine* unbekannte Kantenlänge des Prisma, die *Schnittkante* der dreieckigen Basis. Werden zwei solcher Prismen aber mit ihren Schnittflächen nach Innen zusammengestellt, kommt man bei der Berechnung des Volumens ohne die Unbekannte aus.

Volumen eines Prisma:
2 Prismen zusammengestellt ergeben eine Vierkantsäule mit quadratischer Basis, deren Kantenlänge 1/3 der Länge der Würfelkante L beträgt.

$V_{Säule} = 1/3 \cdot 1/3 \cdot 1$ Würfelkantenlänge

$V_{Säule} = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 10}{3 \cdot 3 \cdot} = \dfrac{1000}{9}$

$V_{Säule} = 111{,}11\ cm^3$

$V_{Prisma} = \dfrac{111{,}11}{2}$

$V_{Prisma} = 55{,}55\ cm^3$

4 Prismen, mit ihren Schnittflächen nach Außen zusammengestellt, ergeben eine Vierkantsäule mit quadratischer Basis, deren Kantenlänge gleich der unbekannten Länge der Schnittkante ist. In diesem Fall muß der Satz des Pythagoras angewendet werden, um die Kantenlänge zu errechnen. (Dreikantbasis des Prisma)

$$x^2 = a^2 + a^2$$
$$x^2 = 2 \cdot a^2$$
$$x = a \cdot 2$$
$$= 3{,}33 \cdot 2$$
$$x = 4{,}71 \text{ cm}$$

$$V_{Prisma} = \frac{X \cdot X \cdot 1 \text{ Würfelkantenlänge}}{4}$$
$$V = \frac{4{,}71 \cdot 4{,}71 \cdot 10}{4}$$
$$= \frac{221{,}84}{4}$$
$$V_{Prisma} = 55{,}46 \text{ cm}^3$$

$$V_{Säule} = 221{,}84 \text{ cm}^3$$

$$V_{Achtkantsäule} \text{ (Kern)} = V_{Würfel} - V_{Säule}$$
$$V = 1000 - 221{,}84$$
$$V = 778{,}16 \text{ cm}^3$$

Von den Schülern wurden verschiedene Lösungsmöglichkeiten gefunden. Ihre Denkschritte haben sie immer wieder am Körperobjekt hinterfragt und nachvollzogen.

5. Aufgabenstellung: Gegenstand des Unterrichts ist diesmal der KUBOEDER Nr. 10 mit Tetraeder-Kern. Es steht nur ein Exemplar zur Verfügung, so daß der geschnittene Würfel vom Lehrer präsentiert wird. Die 18 SS haben alle einen guten Hinblick.

Die Aufgabe lautet: Schnittregel des Würfels erkennen und formulieren. Der Begriff "Diagonale" ist den Schülern geläufig, wird aber vom Lehrer nocheinmal angesprochen.

Durchführung: Es zeigt sich, daß diesmal die verbale Darstellung eines Sachverhalts schon besser gelingt. Folgende

Schnittregel wird gefunden: 1. Von einer Diagonalen der Würfelfläche zu den jeweils gegenüberliegenden Würfelecken schneiden. 2. Dasselbe von der gegenüberliegenden Würfelfläche aus wiederholen, jedoch so, daß die Diagonalen über Kreuz stehen.

Was für ein Körper entsteht durch einen Schnitt dieser Regel? (Die Teilkörper werden durch den Lehrer entfernt)

SS: - Ägypten!
- Pyramide
- gleichseitige Pyramide

L. Warum gleichseitig?

SS: - sieht man doch!
- Flächen sind gleich
- und auch die Kanten sind gleich lang.

L: Können wir diese Behauptung auch begründen?

SS: - Die Kanten der Pyramide sind doch alle auch am Würfel sichtbar.
- sie gehen quer durch die Würfelfläche
- diagonal
- jede Pyramiden-Kante entspricht der Diagonale einer Würfelfläche.

L: Wer möchte nun die Pyramide mitsamt ihren Ergänzungsformen wieder in den Kasten einräumen?

SS: - ist doch einfach!
- oh, das geht ja gar nicht
- aber es muß, das war doch vorher auch alles drin.
- nochmals alles raus - vielleicht den Würfel vorher einmal zusammenbauen - also so liegen die Teile am Kern?

Erneuter Versuch, jedoch der Kern ist nach wie vor sperrig.

Zuruf SS: Die Kante ist doch die Diagonale der Würfelfläche!
- ja, sie muß im Kästchen nach unten
- klar --- diagonal
- ah jetzt!

Der Rest fügt sich fast von selbst.

Es zeigt sich an diesem kleinen Übungsstück sehr schön, wie die formale Struktur des Würfels, die im Schnitt artikulierte

Ordnung, logisches Denken und angemessenes Handeln sich wechselseitig in den Dienst nehmen; eine Praxis also, in der die Theorie durch die konkrete Auseinandersetzung mit der Widerständigkeit des Körperlichen sowie einer immanenten Reflexion auf die im Würfel erfahrbare Grundgesetzlichkeit sich in sinnlich-reflexiver Weise artikuliert und in Vorstellungsreihen zum Ausdruck kommt. Ins Allgemeine gewendet heißt dies, daß im Prozeß der reflexiven Sinnestätigkeit und die dadurch in Gang kommende Ausbildung des körperlich-räumlichen Vorstellungsvermögens sich Körperlichkeit allererst konstituiert.

6. Aufgabenstellung: Schrägbild zeichnen des Würfels mit einem Schnitt. Dies gelingt den SS ohne Schwierigkeiten.

7. Aufgabenstellung: Berechnung der Körpervolumen.

Die vier Segmente (Schale) des Würfels ergeben zusammengesetzt eine quadratische Pyramide. Die Grundfläche derselben hat die Saitenlänge der Diagonalen einer Würfelfläche und errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras:

$$s^2 = a^2 + a^2$$

$$s = a^2 + a^2$$

$$s = 14{,}14 \text{ cm}$$

Die quadratische Pyramide aus den vier Segmenten ist in ihrer Höhe gleich der Seitenlänge des Würfels: $h = 10$ cm

$$V_{Pyramide} = \frac{s \,.\, s \,.\, h}{3}$$

$$V = \frac{200 \,.\, 10}{3} = \frac{2000}{3}$$

$$V = 666{,}6 \text{ cm}^3$$

$$V_{Tetraeder} = V_{Würfel} - V_{Pyramide}$$
$$V = 1000\ cm^3 - 666{,}6\ cm^3$$
$$V = 333{,}34\ cm^3$$

Jeder Schritt im Umgang mit der Formel konnte am Würfel und seinen Teilsegmenten nachvollzogen werden, so daß das Material sowohl bei der Entwicklung der Formeln als auch bei deren Rückkoppelung zum Gegenstand unentbehrlich war. Jede Rechen- und Denkphase findet im verstehenden Umgang mit den KUBOEDERN ihre Substanz.

Über die praktische Verarbeitung solcher Prädikationsverläufe lernt der Schüler, seinen eigenen Aktionen Klarheit zu geben. So werden Lernprozesse, wird das Lernen aus der Enge eines rezeptiven Verhaltens zu einem selbstinszenierten, der verstehenden Klarheit verschriebenen Lernen befreit. Wichtig und für das praktische Lernen in besonderem Maß zuträglich ist, daß bei einer solchen unterrichtlichen Arbeit überkommene Prädikatensysteme ihrer statischen Befangenheit in die Regelsysteme überführt und das heißt, daß die Regelsysteme selbst thematisiert, also Gegenstand des Unterrichts werden können, was gleichzeitig bedeutet, daß die Bestimmung des *Gebrauchs* der Prädikate neu zur Disposition steht. Neue, andere, dynamischere und unter anderen Prämissen organisierte Bezugssysteme werden möglich. Als Beispiel eines überkommenen Prädikatensystems kann das System einer Begriffspyramide angeführt werden, die den Gebrauch von Prädikaten regelt.

Begriffspyramiden in der Art wie

Lebewesen
Tier Pflanze
Rabe

(Lorenzen)

oder

Körper
kubisch rhombisch
Würfel

(aus unserer Arbeit)

führen, pädagogisch gesehen, in eine Sackgasse und didaktisch in die Enge eines spezifischen Fachs, das Regelsysteme nur tradieren will, so dass der Unterricht beschränkt bleibt auf Übungen im rechten Gebrauch der Begriffe im Sinne eines jeweils geltenden Systems. In einer auf Verstehen aufbauenden Unterrichtspraxis dürfen ab er nicht Begriffssysteme die Planung des Unterrichts bestimmen, sondern zeitlich strukturierte Folgen von Handlung und Reflexion. Zwar muss in einem dem Unterricht vorgängigen Bezugssystem (Handlungskonzept)der didaktische Ort von Begriffen vorab geklärt sein. Ein kompetenter Gebrauch aber kann nur im konkreten Unterricht bestimmt werden. In gleicher Weise kann die Sinnhaftigkeit der Regeln und Ordnungen dieser Bestimmung erst in der Auseinandersetzung mit der geistigen Natur der Dinge zum Vorschein kommen.

So hat sich eine Pyramide als sinnvoll erwiesen, die keine Begriffshierarchie aufbaut (Lebewesen/Tiere/Rabe)vielmehr die elementaren Grammatiken von Lebensformen zum Bewusstsein bringt, so dass im Unterricht die Bewegungsmodalitäten eines Körpers zur Sprache kommen können, durch welche das Kind über das Verstehen geistige Brücken schlagen kann zur Natur der Körperlichkeit der Dinge - eine Pyramide also in der Form

	Würfel	
Flächen	Kanten	Ecken
Ruhe	Balance	Tanz

Was nun Punkt, Linie, Fläche und Körper als Grundbegriffe der Geometrie in einer verstehenden Praxis bedeuten, was sie konkret bewirken und wie sie zueinander in welchen Beziehungen gesehen werden und stehen können, das sind aus unserer Sicht zunächst Fragen nach dem Sinn von Ordnungen. Will der Schüler den Dingen wirklich näher kommen, d.h. sie in ihrer je spezifischen Eigenwilligkeit verstehen lernen, muss er die Choreographien erkunden, in denen die Körperdinge aus sich selbst zur Sprache kommen können; er muss sich also vor allem für die Möglichkeiten der Bewegungsformen und der darin zum Ausdruck kommenden Ordnung sensibilisieren, in der sich diese artikulieren und darstellen lassen.

Erforderlich sind also Medien, mittels derer im Wesentlichen die Dimensionen sichtbar werden, in denen herrschaftsfreie, und das heißt auch im ursprünglichen Sinn des Worts schöpferische Beziehungen zu den Dingen möglich, also zu entwickeln und zu fordern sind. Mit anderen Worten: den Medien müssen von vornherein Signaturen anhaften, die den Schüler in seinem Tun auf die Spur der erwähnten Dimensionen führen. Andererseits müssen sich die Umgehensformen der Schüler wieder in lesbaren Spuren, nachvollziehbaren Sequenzen oder sinngebenden Artikulationen niederschlagen. Die Kuboeder sind solche Medien, welche die unterrichtlichen Anforderungen erfüllen können.

Fazit: Eine vermessende Geometrie baut nicht auf Axiomen auf. Vielmehr wandelt der Schüler mathematische Formeln in Aktionssprache um, das heißt er selbst programmiert durch die sein Tun bestimmende Regelfindung sein eigenes Vorgehen in der Erfüllung praktischer mathematischer Aufgaben und macht es dadurch auch allgemein verbindlich, das heißt der Einsicht Anderer zugänglich und somit nachvollziehbar. Der Schüler erlebt mithin in einem unmittelbar sinnlich motivierten und maßvoll gestalteten Körperbezug Mathematik als einen konstruktiv verstehenden und handelnden Aufbau von wesentlichen, und das heißt von elementaren körperlichen Gesetzmäßigkeiten. Das körperliche Geschick vor allen Dingen ist es also, das im Verein mit regelgeleiteten Handlungen, sprachlicher wie auch darstellender Natur, die Mathematik hervorbringt, weil über die Einsicht in eine Vielfalt maßvoller Verhältnisse, die mit den Schnitten konkretisiert sind, diese wie ein Text sich dem Schüler erschließen und deshalb hzu Artikulationen herausfordern, die die Gesetze, die in den Verhältnissen herrschen, in abgewandelten Formen und Kontexten ganz neu zum Vorschein bringen.

Literaturnachweis:

Paul Klee: - Beiträge zur bildnerischen Formlehre. Faks. Ausg. d. Originalman. von Paul Klees erstem Vortragszyklus am Staatl. Bauhaus, Weimar, 1921/22, hrsg. von J. Glaesemer, Basel/Stgt. 1979.

- Das bildnerische Denken, hrsg. von J. Spiller, 4. Aufl., Basel/Stgt. 1981.
- Konstruktion - Intuition. Katalog der Städt. Kunsthalle Mannheim 1990/91, hrsg. von Hans-Jürgen Buderer, Verlag Gerd Hatje.

Kamlah, W./P. Lorenzen: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens. HTB 227, 1973.

Paul Lorenzen: - Methodisches Denken. stw 73. 1980.
- Elementargeometrie. Das Fundament der Analytischen Geometrie. B.I.-Hochschultaschenbücher Bd.400. Mannheim/Wien/Zürich 1984.

Francis Ponge: Einführung in den Kieselstein und andere Texte. Französisch und deutsch. Mit einem Aufsatz von Jean-Paul Sartre. Ffm. 1986.